

La géométrie logique du dodécaèdre rhombique des oppositions

Hans Smessaert¹ & Lorenz Demey²

L’objectif de cet article est de décrire comment les différents diagrammes Aristotéliens peuvent être inscrits dans un objet géométrique à trois dimensions, à savoir le dodécaèdre rhombique. Tout d’abord, nous allons introduire trois notions de base (section 1). Puis, nous allons traiter trois types de diagrammes Aristotéliens à deux dimensions: les carrés (section 2), les hexagones (section 3) et les octogones (section 4). Ensuite, nous montrerons comment ces trois types de diagrammes ont une représentation visuelle à trois dimensions à l’intérieur du dodécaèdre rhombique (section 5). Nous terminerons par quelques conclusions et par quelques perspectives futures (section 6).

1. Introduction

Dans cette première partie, trois notions de base seront introduites: d’abord les chaînes de bits (§ 1.1), puis les relations Aristotéliennes entre les chaînes de bits (§ 1.2) et finalement les paires de Contradictaires (§ 1.3).

1.1 Chaînes de bits (CB)

Une première notion de base dans cette approche de la Géométrie Logique est celle de la CHAÎNE DE BITS (‘bitstring’ en Anglais, Smessaert & Demey 2014a), abrégée comme CB. Une CB est une séquence de positions ayant une valeur de “0” ou “1”, qui sert de représentation algébrique de la dénotation d’une formule dans un système logique. Dans cet article, nous centrerons la discussion sur les CB à quatre positions. Chaque position dans une telle CB correspond à une des quatre parties d’une forme normale disjonctive (FND) qui représentent les quatre possibilités logiques fondamentales.

$$\begin{array}{cccc} [p \wedge q] & \vee & [p \wedge \neg q] & \vee & [\neg p \wedge q] & \vee & [\neg p \wedge \neg q] \\ 1/0 & & 1/0 & & 1/0 & & 1/0 \\ \\ [p \wedge q] & \vee & [\neg(p \rightarrow q)] & \vee & [\neg(p \leftarrow q)] & \vee & [\neg(p \vee q)] \\ 1/0 & & 1/0 & & 1/0 & & 1/0 \end{array}$$

Figure 1. *Forme Normale Disjonctive: les formules du Calcul des Propositions*

$$\begin{array}{cccc} [\Box p] & \vee & [\neg \Box p \wedge p] & \vee & [\Diamond p \wedge \neg p] & \vee & [\neg \Diamond p] \\ 1/0 & & 1/0 & & 1/0 & & 1/0 \end{array}$$

Figure 2. *Forme Normale Disjonctive: les formules de S5*

Dans la FND de la Figure 1, chaque position dans la chaîne de bits correspond à une ligne dans la table de vérité des opérateurs du Calcul des Propositions. Dans la FND de la logique modale S5 (voir Figure 2), la zone de la contingence, entre le nécessaire à gauche et l’impossible à droite, s’est scindée en une partie “non-nécessaire mais actualisée” et une partie “possible mais

¹Groupe de Recherche en Linguistique Formelle et Computationnelle, KU Leuven, Belgique

²Centre de Logique et Philosophie Analytique, KU Leuven, Belgique

non-actualisée”. Puis, nous faisons la distinction entre les CB de niveau 1 (CB N1), de niveau 2 (CB N2) et de niveau 3 (CB N3), selon le nombre de positions à valeur “1”.

1.2 Relations Aristotéliennes entre chaînes de bits

Afin de pouvoir donner une définition algébrique des relations Aristotéliennes, il faut d’abord définir les opérations de conjonction et de disjonction sur les CB α et β . Comme illustré dans la Figure 3, il s’agit d’une opération cumulative de conjonction ou de disjonction qui est calculée position par position. La CB résultante de la conjonction $\alpha \wedge \beta$ a une valeur de “1” sur chaque position où les deux CB α et β ont la valeur “1” sur leur position correspondante, tandis que la CB résultante de la disjonction $\alpha \vee \beta$ a une valeur de “1” sur chaque position où au moins l’un des deux CB α ou β a la valeur “1” sur sa position correspondante:

α	1 0 1 0	α	1 0 1 0
β	1 1 0 0	β	1 1 0 0
	-----		-----
$\alpha \wedge \beta$	1 0 0 0	$\alpha \vee \beta$	1 1 1 0

Figure 3. Conjonction (meet) et disjonction (join) entre chaînes de bits

Deux formules d’un système logique sont CONTRADICTOIRES quand elles ne peuvent ni être vrais ensemble ni être fausses ensemble. En termes de leur CB, cela veut dire, respectivement, que leur conjonction mène à une contradiction ($\alpha \wedge \beta = 0000$), tandis que leur disjonction mène à une tautologie ($\alpha \vee \beta = 1111$). La Figure 4 montre que les relations Aristotéliennes de la CONTRARIETE et la SUBCONTRARIETE se distinguent de la contradiction en niant l’une des deux conditions de cette dernière. Deux formules contraires ne peuvent pas être vrais ensemble ($\alpha \wedge \beta = 0000$) mais peuvent être fausses ensemble ($\alpha \vee \beta \neq 1111$). Inversement, deux formules subcontraires peuvent être vrais ensemble ($\alpha \wedge \beta \neq 0000$) mais ne peuvent pas être fausses ensemble ($\alpha \vee \beta = 1111$).

CONTRADICTOIRE	$(\alpha, \beta) \equiv [\alpha \wedge \beta = 0000] \& [\alpha \vee \beta = 1111]$
CONTRAIRE	$(\alpha, \beta) \equiv [\alpha \wedge \beta = 0000] \& [\alpha \vee \beta \neq 1111]$
SUBCONTRAIRE	$(\alpha, \beta) \equiv [\alpha \wedge \beta \neq 0000] \& [\alpha \vee \beta = 1111]$
SUBALTERNE	$(\alpha, \beta) \equiv [\alpha \wedge \beta = \alpha] \& [\alpha \wedge \beta \neq \beta]$

Figure 4. Les relations Aristotéliennes d’Opposition entre chaînes de bits

Notons que la quatrième relation Aristotélienne, à savoir celle de la SUBALTERNATION, n’est pas caractérisée en termes d’être vrai ou faux ensemble, mais en termes d’implication stricte ou d’inclusion stricte entre les CB, c’est-à-dire la propagation de la vérité (Smessaert & Demey 2014b).

1.3 Paires de Contradictaires (PCD)

Ensuite, les CB sont appariées, ce qui mène à une troisième notion de base, à savoir celle de la PAIRE DE CONTRADICTOIRES (abrégée comme PCD). Le premier groupe³ contient les quatre PCD de type C (PCD/C) dans le Tableau 1, qui relient les quatre CB de niveau 1 à leur contradictoires de niveau 3. Ainsi, la relation de contradiction entre $\neg(p \vee q)$ et $(p \vee q)$, par exemple, correspond à la négation globale des quatre valeurs des CB à l'intérieur de la PCD <0001, 1110>.

S5	Calc.Prop.	CB N1	CB N3	Calc.Prop.	S5
$\Box p$	$p \wedge q$	1000	0111	$\neg(p \wedge q)$	$\neg\Box p$
$\neg\Box p \wedge p$	$\neg(p \rightarrow q)$	0100	1011	$p \rightarrow q$	$\Box p \vee \neg p$
$\Diamond p \wedge \neg p$	$\neg(p \leftarrow q)$	0010	1101	$p \leftarrow q$	$\neg\Diamond p \vee p$
$\neg\Diamond p$	$\neg(p \vee q)$	0001	1110	$p \vee q$	$\Diamond p$

Tableau 1. Paires de Contradictaires type C (PCD/C) = CB niveau 1 + CB niveau 3

Le deuxième groupe contient les trois PCD de type O (PCD/O) dans le Tableau 2, qui relient les six CB de niveau 2 ayant leur contradictoires dans le même niveau 2. La relation de contradiction entre $\Box p \vee \Diamond\neg p$ et $\neg\Box p \wedge \Diamond p$, par exemple, correspond à une négation globale des quatre valeurs à l'intérieur de la PCD <1001, 0110>.

S5	Calc.Prop.	CB N2	CB N2	Calc.Prop.	S5
p	p	1100	0011	$\neg p$	$\neg p$
$\Box p \vee (\Diamond p \wedge \neg p)$	q	1010	0101	$\neg q$	$\neg\Diamond p \vee (\neg\Box p \wedge p)$
$\Box p \vee \neg\Diamond p$	$p \leftrightarrow q$	1001	0110	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$\neg\Box p \wedge \Diamond p$
$\Box p \wedge \neg\Box p$	$p \wedge \neg p$	0000	1111	$p \vee \neg p$	$\Box p \vee \neg\Box p$

Tableau 2. Paires de Contradictaires type O (PCD/O) = CB niveau 2 + CB niveau 2

La huitième PCD, qui relie la contradiction 0000 à la tautologie 1111, ne sera pas incluse dans les diagrammes, mais elle a joué un rôle important dans la définition algébrique des relations Aristotéliennes introduites ci-dessus. Dans les sections, suivantes nous allons construire des diagrammes Aristotéliens de plus en plus complexes qui se distingueront aussi bien par le type des PCD qu'ils contiennent que par la constellation globale de relations Aristotéliennes qu'ils produisent.

2. Les carrés Aristotéliens des Oppositions

Dans la Figure 5 nous distinguons trois familles de CARRÉS DES OPPOSITIONS. D'abord, il y a les deux carrés classiques dans les Figures 5a-b, qui ont les diagonales pour la contradiction, les flèches menantes vers le bas pour la subalternation, la ligne en tirets en haut connectant les contraires et la ligne pointillée en bas entre les subcontraires:

³La signification des abréviations type C (pour "cube") et type O (pour "octaèdre") sera expliquée dans la section 5 sur les représentations visuelles à trois dimensions.

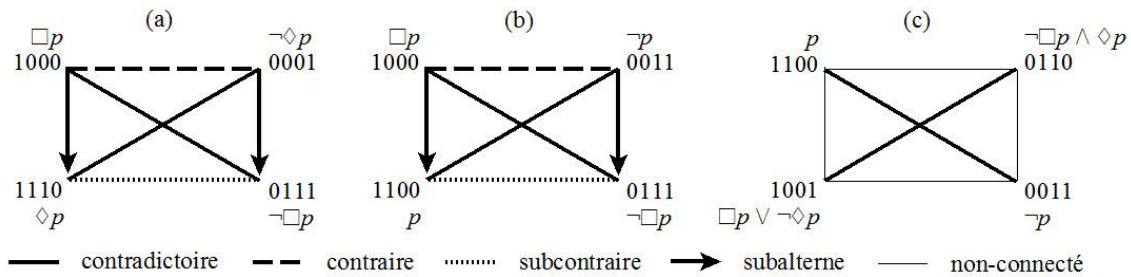


Figure 5. Carrés des oppositions: (a) carré classique balancé, (b) carré classique non-balancé, (c) carré dégénéré balancé

La différence fondamentale entre les deux carrés classiques concerne le type de PCD qu'ils emploient. Le carré classique balancé dans la Figure 5a contient deux PCD qui sont du même type C. Le carré classique non-balancé dans la Figure 5b, par contre, contient une PCD de type C (la diagonale qui mène d'en haut à gauche vers le bas à droite) et une PCD de type O (la diagonale qui mène d'en haut à droite vers le bas à gauche). Le troisième carré, dans la Figure 5c, est un carré DEGENERE: la seule relation Aristotélienne qui reste est la contradiction des deux diagonales. Les quatre bords du carré sont marqués comme 'non-connectés', ce qui indique que ces quatre paires de formules sont logiquement indépendantes ('unconnected'), c'est-à-dire qu'aucune des quatre relations Aristotéliennes dans la Figure 4 n'est applicable. Par ailleurs, ce carré dégénéré est à nouveau un carré balancé, parce qu'il consiste de deux PCD du même type O. En termes de CB, un carré balancé consiste ou bien en deux CB de niveau 1 et deux de niveau 3 (le carré classique balancé de la Figure 5a), ou bien en quatre CB de niveau 2 (le carré dégénéré balancé de la Figure 5c). Le carré non-balancé de la Figure 5b, en revanche, contient des CB des trois niveaux différents⁴.

3. Les hexagones Aristotéliens des Oppositions

Dans cette troisième section, nous rappelons d'abord les trois HEXAGONES DES OPPOSITIONS qui sont déjà bien décrits dans la littérature, à savoir l'hexagone Jacoby-Sesmat-Blanché fort, l'hexagone Jacoby-Sesmat-Blanché faible et l'hexagone Sherwood-Czezowski (§ 3.1). Puis, nous introduisons deux types d'hexagones (partiellement) dégénérés (§ 3.2). Pour chacune des cinq familles d'hexagones, nous indiquerons les types de PCD dont elles consistent et les types de carrés qui sont inscrits. Nous terminerons par donner un tableau sommaire des hexagones (§ 3.3).

3.1 Les hexagones Jacoby-Sesmat-Blanché et Sherwood-Czezowski

Les trois types d'hexagones Aristotéliens dans la Figure 6 peuvent être considérés comme trois stratégies différentes pour développer ou généraliser le carré classique balancé -- qui est marqué en gris et qui contient deux diagonales PCD de type C -- en hexagone:

⁴Notons que la quatrième possibilité logique, à savoir le CARRE DEGENERE NON-BALANCE, existe, mais ne peut être construit qu'avec des CB à six positions au lieu de quatre.

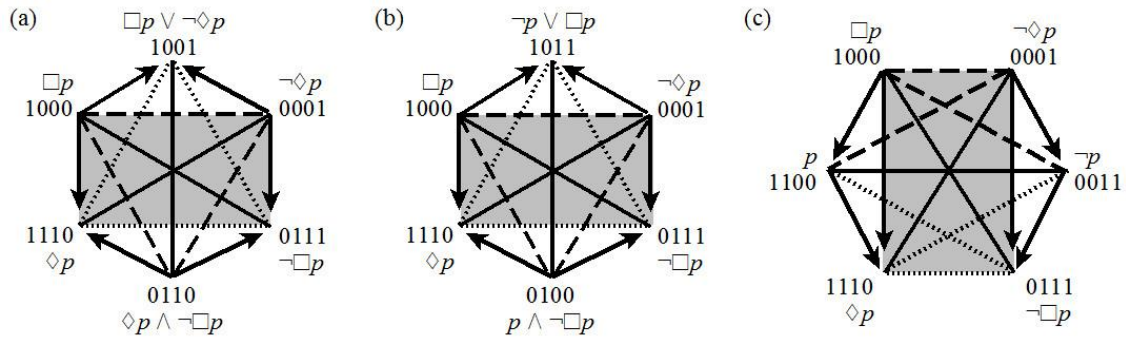


Figure 6. Hexagones des oppositions: (a) hexagone Jacoby-Sesmat-Blanché fort, (b) hexagone Jacoby-Sesmat-Blanché faible, (c) hexagone Sherwood-Czezowski

L'hexagone le plus connu est sans doute celui proposé par Jacoby (1950), Sesmat (1951) et Blanché (1969) dans la Figure 6a (abrégé dorénavant comme 'HEXAGONE JSB'). La troisième diagonale est ajoutée verticalement. C'est une PCD de type O qui contient, en haut, la disjonction des deux sommets supérieurs du carré et en bas, la conjonction des deux sommets inférieurs du carré. Dans le deuxième type d'hexagone (Figure 6b), qui a été découvert par Pellissier (2008) et Moretti (2009), la diagonale additionnelle est aussi ajoutée verticalement, mais elle est une PCD de type C. Par suite, la CB en haut n'est pas la disjonction des deux sommets supérieurs du carré et la CB en bas n'est pas la conjonction des deux sommets inférieurs du carré non plus. Du point de vue algébrique, ça veut dire que l'hexagone de Figure 6a est clos sous les opérateurs booléens, tandis que dans l'hexagone de Figure 6b il n'y a pas de clôture booléenne. Mais, malgré cette différence importante, la constellation globale des relations Aristotéliennes est la même: les trois relations de contrariété et celles de subcontrariété constituent deux triangles qui s'interconnectent à l'intérieur de l'hexagone, tandis que les flèches de subalternation constituent l'extérieur de l'hexagone, menant de chaque sommet du triangle contraire aux deux sommets adjacents sur le triangle subcontraire. A cause de cette ressemblance fondamentale, Pellissier et Moretti ont nommé l'hexagone de la Figure 6a l'HEXAGONE JSB FORT et celui de la Figure 6b l'HEXAGONE JSB FAIBLE.

Comme dans l'hexagone JSB fort, la diagonale additionnelle dans l'hexagone de la Figure 6c est une PCD de type O. Cependant, dans ce cas-là, la diagonale est ajoutée horizontalement: ses deux formules et leur CB sont intermédiaires -- en termes de la relation de subalternation -- entre les deux sommets à gauche du carré et entre les deux sommets à droite. Le résultat est une constellation hexagonale Aristotélienne tout à fait différente: toutes les flèches de subalternation mènent vers le bas et constituent deux triangles de transitivité, tandis que les relations de contrariété et de subcontrariété ne constituent plus de formes triangulaires. Cet hexagone a été décrit par Czezowski (1955), mais Khomskii (2011) a démontré de manière convaincante qu'il était déjà connu par le logicien médiéval Guillaume de Sherwood (voir Kretzmann 1966). Pour cette raison, l'hexagone de la Figure 6c sera nommé l'HEXAGONE SHERWOOD-CZEZOWSKI (abrégé comme 'hexagone SC'). Dans Smessaert (2012) il est montré que -- comme dans le cas de l'hexagone JSB faible -- l'hexagone SC diffère fondamentalement de l'hexagone JSB fort en n'étant pas clos sous les opérateurs booléens.

Jusqu'ici, les trois types d'hexagones Aristotéliens dans la Figure 6 ont été distingués sur base des types de PCD, des constellations triangulaires et de la propriété de clôture booléenne. Une dernière façon de caractériser cette distinction est en termes des trois types de carrés Aristotéliens qui ont été introduits dans la section précédente. En général, un carré peut être inscrit dans un hexagone de trois manières différentes. Vu que l'hexagone consiste en trois diagonales, chacune d'entre elles peut être omise pour donner un carré différent, contenant deux des trois diagonales originales. Par conséquent, les hexagones Aristotéliens se distinguent par le type de carrés inscrits et par la manière d'inscription.

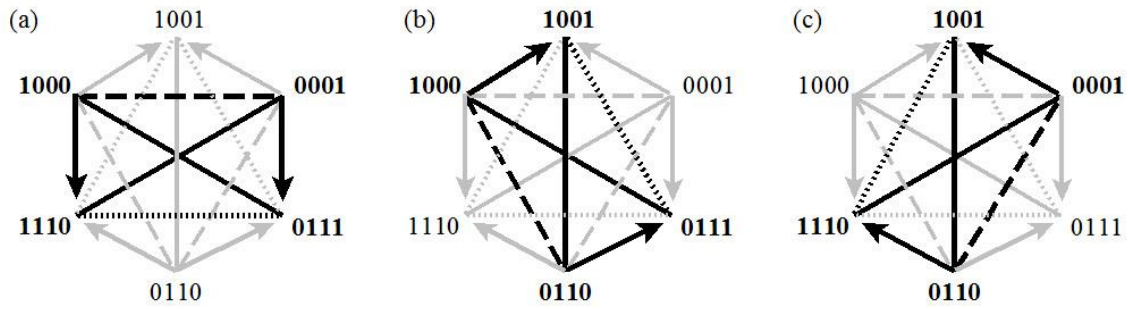


Figure 7. Les carrés dans l'hexagone Jacoby-Sesmat-Blanché fort:
 (a) classique balancé, (b) classique non-balancé, (c) classique non-balancé

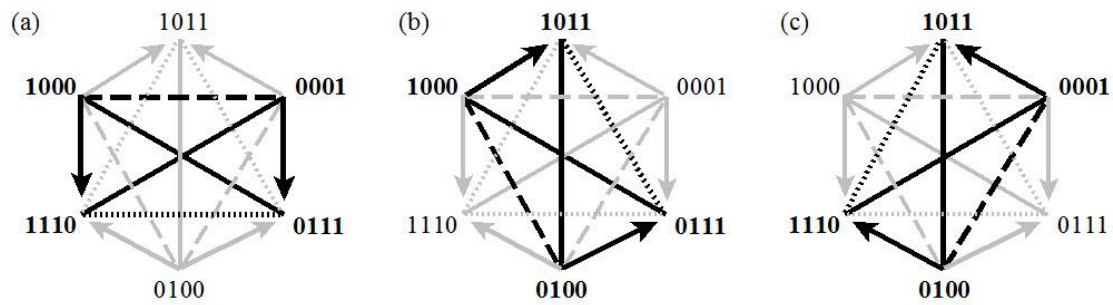


Figure 8. Les carrés dans l'hexagone Jacoby-Sesmat-Blanché faible:
 (a) classique balancé, (b) classique balancé, (c) classique balancé

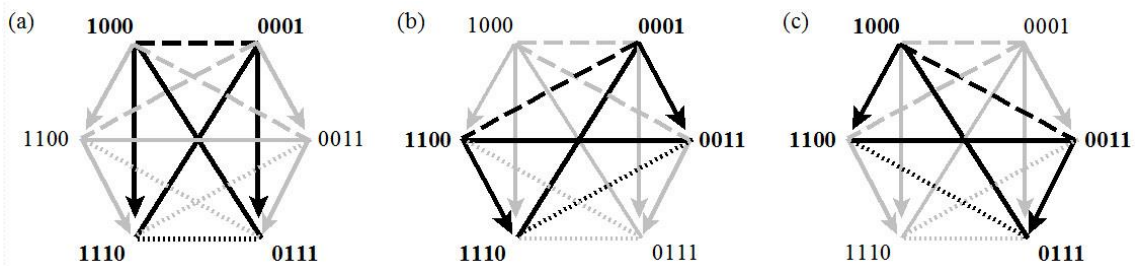


Figure 9. Les carrés dans l'hexagone Sherwood-Czezowski:
 (a) classique balancé, (b) classique non-balancé, (c) classique non-balancé

Comparant les deux hexagones JSB, on observe qu'ils partagent le carré classique balancé dans les Figures 7a et 8a. Les deux autres carrés inscrits, par contre, sont du type classique non-balancé dans le cas de l'hexagone JSB fort (Figure 7b-c), mais du type classique balancé dans le cas de l'hexagone JSB faible (Figure 8b-c): chaque carré dans le JSB faible contient deux PCD de type C. L'hexagone SC dans la Figure 9 ressemble l'hexagone JSB fort en contenant lui aussi un carré classique balancé et deux carrés classiques non-balancés. Néanmoins, la grande différence entre l'hexagone JSB fort et l'hexagone SC est la façon dont les deux carrés non-balancés s'inscrivent dans l'hexagone. Dans les Figures 7b-c, l'inscription concerne une rotation de 120 degrés dans le sens horaire ou antihoraire, à cause de la forme triangulaire des relations (sub)contraires. Dans les Figures 9b-c, par contre, la rotation ne compte que 30 degrés, parce que les relations de (sub)contrariété n'ont plus une constellation triangulaire. Ci-dessus, nous avons lié cette différence à l'absence de clôture booléenne dans le cas de l'hexagone SC.

3.2 Les hexagones (partiellement) dégénérés

Les trois types d'hexagones Aristotéliens étudiés dans le paragraphe précédent (Figures 6 à 9) ont été décrits comme des généralisations ou des extensions du carré classique balancé. Une stratégie comparable est adoptée dans la Figure 10: un carré balancé -- cette fois-ci non pas classique mais dégénéré -- est pris comme point de départ pour construire deux nouveaux types d'hexagones Aristotéliens:

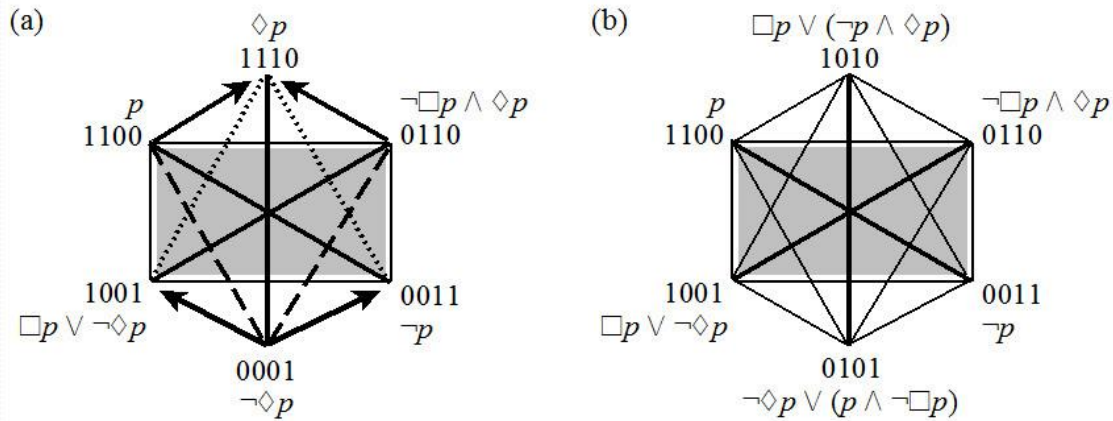


Figure 10. Hexagones (partiellement) dégénérés:(a) Unconnected-4 (b) Unconnected-12

Le carré dégénéré balancé -- marqué en gris -- contient deux diagonales PCD de type O, et donc quatre CB de niveau 2, entre lesquelles il existe quatre relations d'indépendance logique ou non-connexité ('unconnectedness'). La troisième diagonale, une PCD de type C, est ajoutée verticalement. Le résultat est une configuration Aristotélienne qui se distingue fondamentalement de celles de l'hexagone JSB ou l'hexagone SC dans la Figure 6: l'hexagone ne contient que quatre flèches de subalternation au lieu de six, et les constellations de (sub)contrariété n'ont plus une forme triangulaire mais une forme de V. A cause de la présence de ces quatre relations de non-connexité, l'hexagone dans la Figure 10a est nommé l'HEXAGONE UNCONNECTED-4 (ou U4). Dans l'hexagone de la Figure 10b, la troisième diagonale est ajoutée verticalement aussi, mais dans ce cas elle est une PCD du même type O que les deux diagonales du carré dégénéré, ce qui implique que toutes les six CB sont du même niveau 2. Le résultat n'est pas un hexagone partiellement dégénéré comme l'hexagone U4, mais un hexagone complètement dégénéré. Hormis les trois diagonales de la contradiction, aucune relation Aristotélienne n'a survécu. Sur base de la présence de ces douze relations de non-connexité, l'hexagone dans la Figure 10b est nommé l'HEXAGONE UNCONNECTED-12 (ou U12). Comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent, les deux types d'hexagones Aristotéliens dégénérés peuvent aussi être distingués par le type de carrés inscrits et par la manière d'inscription, comme il est montré dans les Figures 11 et 12.

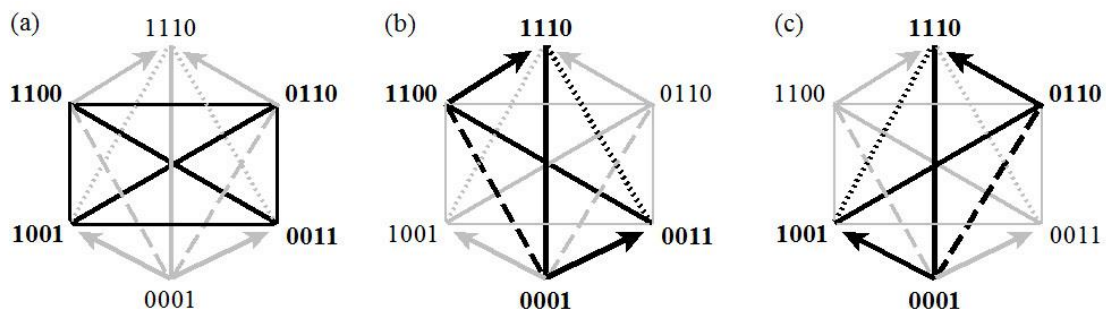


Figure 11. Les carrés dans l'hexagone Unconnected-4:
(a) dégénéré balancé, (b) classique non-balancé, (c) classique non-balancé

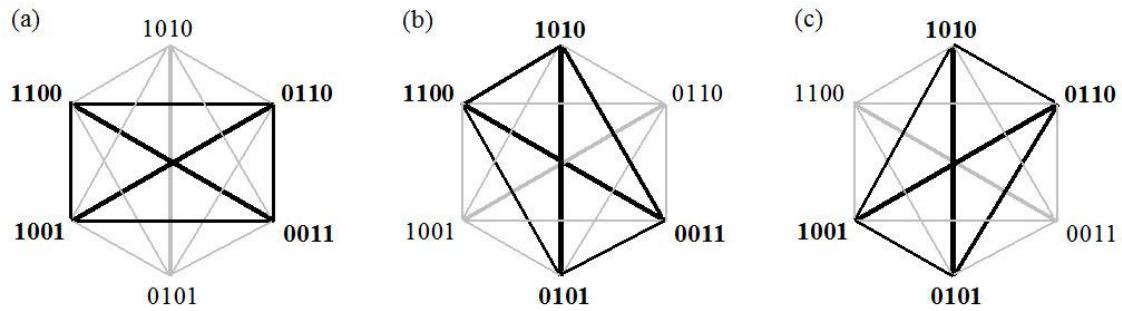


Figure 12. Les carrés dans l'hexagone *Unconnected-12*:
 (a) dégénéré balancé, (b) dégénéré balancé, (c) dégénéré balancé

L'hexagone U4 ressemble les hexagones JSB fort et SC en contenant lui aussi un carré balancé et deux carrés non-balancés, mais dans ce cas-ci le carré balancé (dans la Figure 11a) est un carré dégénéré au lieu d'un carré classique. L'inscription des deux carrés classiques non-balancés (Figure 11b-c) montre la même rotation de 120 degrés (dans le sens horaire ou antihoraire) qu'avec l'hexagone JSB fort, parce que la forme V des relations (sub)contraires peut être considérée comme dérivée de la forme triangulaire dans l'hexagone JSB. L'inscription des carrés dans l'hexagone U12 (Figure 12), en revanche, est comparable à celle de l'hexagone JSB faible (Figure 8): vu que les trois PCD sont du même type O, tous les trois carrés inscrits sont des carrés dégénérés balancés.

3.3 Tableau sommaire des hexagones

Pour terminer cette section, le Tableau 3 rassemble les distinctions que nous avons introduites entre les cinq familles d'hexagones Aristotéliens, aussi bien en termes des types de PCD qu'en termes du nombre et du type de carrés inscrits. Les hexagones JSB faible et U12 se ressemblent dans le sens où les trois carrés inscrits sont du même type balancé, respectivement des carrés classiques balancés et des carrés dégénérés balancés. Dans chacune des trois autres familles d'hexagones, par contre, s'inscrivent un carré balancé (classique ou dégénéré) et deux carrés classiques non-balancés.

les hexagones Aristotéliens	PCD type C	PCD type O	carré classique balancé	carré classique non-balancé	carré dégénéré balancé
<i>Jacoby-Sesmat-Blanché (JSB) fort</i>	2	1	1	2	0
<i>Jacoby-Sesmat-Blanché (JSB) faible</i>	3	0	3	0	0
<i>Sherwood-Czezowski (SC)</i>	2	1	1	2	0
<i>Unconnected-4 (U4)</i>	1	2	0	2	1
<i>Unconnected-12 (U12)</i>	0	3	0	0	3

Tableau 3. Distinctions entre les cinq familles d'hexagones Aristotéliens

Notons que, sur la base des deux critères dans le Tableau 3 -- c'est à dire les PCD et les carrés inscrits -- nous ne pouvons pas distinguer l'hexagone JSB fort de l'hexagone SC: tous les deux consistent en deux PCD de type C et une PCD de type O et ils ont donc les mêmes carrés inscrits. Cependant, nous avons démontré dans le paragraphe 3.1 que la différence entre la position verticale ou horizontale de la PCD de type O mène à deux constellations de relations

Aristotéliennes fondamentalement différentes. Par ailleurs, cette différence a été liée à la propriété algébrique de clôture booléenne de l'hexagone JSB fort qui est absente de l'hexagone SC.

4. Les octogones Aristotéliens des Oppositions

Dans cette quatrième section, nous distinguerons trois OCTOGONES DES OPPOSITIONS en montrant en quels types de PCD elles consistent: l'octogone Moretti-Pellissier (§ 4.1), l'octogone Béziau (§ 4.2) et l'octogone Buridan (§ 4.3). Nous terminerons par donner un tableau sommaire des octogones (§ 4.4). Pour les cinq familles d'hexagones dans la section précédente, nous avons indiqué quels types de carrés sont inscrits. Passant au niveau suivant, celui de l'octogone, nous appliquerons le même principe pour distinguer les trois types d'octogones Aristotéliens. En général, un hexagone peut être inscrit dans un octogone de quatre manières différentes: vu que l'octogone consiste en quatre diagonales PCD, chacune d'entre elles peut être omise pour donner un hexagone différent, contenant trois des quatre diagonales originales.

4.1 L'octogone Moretti-Pellissier

L'OCTOGONE MORETTI-PELLISSIER dans la Figure 13 est probablement mieux connu dans sa version à trois dimensions comme le CUBE LOGIQUE de Moretti (2009) et Pellissier (2008). Il consiste en quatre PCD de type C, reliant quatre CB de niveau 1 à leur CB contradictoire de niveau 3. Prenant l'hexagone JSB fort dans la Figure 6a comme point de départ, la diagonale verticale de la PCD de type O est remplacée par deux diagonales de PCD de type C. Une seconde perspective sur cet octogone est de le considérer comme une combinaison de deux carrés classiques balancés, ce qui est représenté dans la Figure 13 par les deux rectangles en gris clair, l'un inscrit horizontalement, l'autre verticalement.

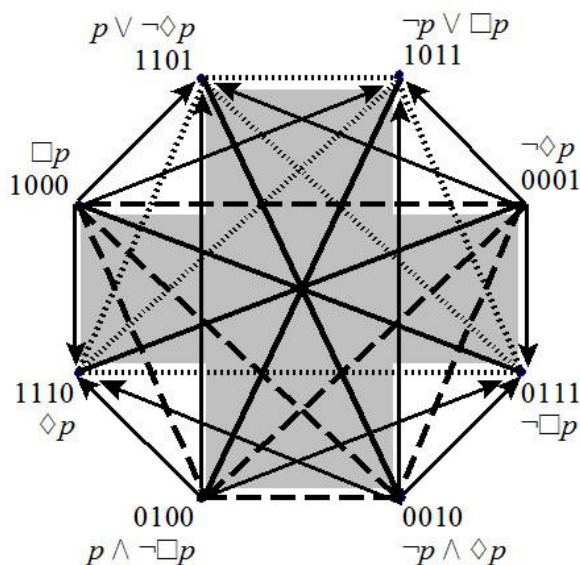


Figure 13. L'octogone Moretti-Pellissier

Vu que les quatre diagonales de l'octogone Moretti-Pellissier sont du même type de PCD, à savoir de type C, les quatre hexagones qui s'inscrivent dans la Figure 14 sont du même type JSB faibles. Autrement dit, l'octogone Moretti-Pellissier contient quatre triangles de contrariété et quatre triangles de subcontrariété.

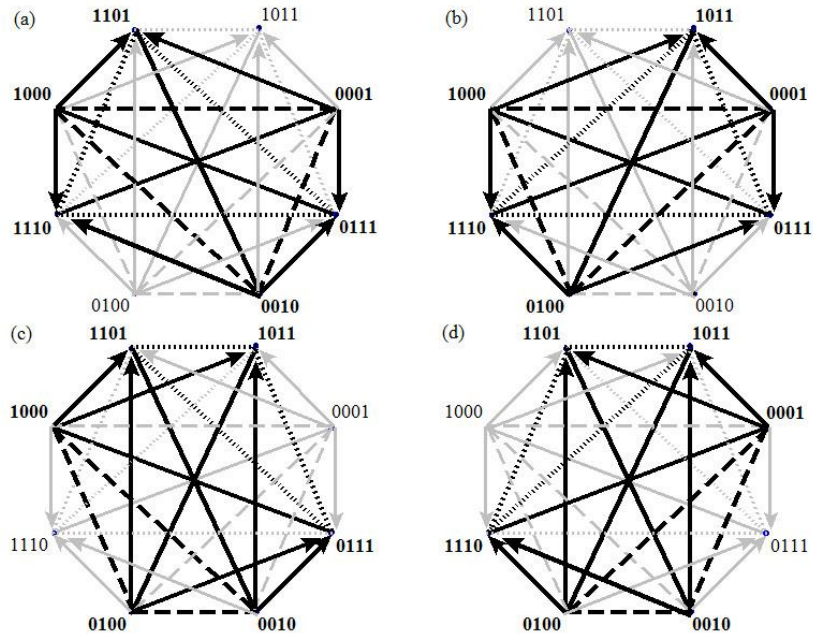


Figure 14. Les hexagones dans l’octogone Moretti-Pellissier
 (a) JSB faible, (b) JSB faible, (c) JSB faible, (d) JSB faible

Notons, cependant, que les deux hexagones dans la Figure 14a-b ont une constellation JSB classique avec deux triangles de contrariété et de subcontrariété qui s’entrelacent à l’intérieur de l’hexagone (voir Figures 6a-b). Dans les hexagones de la Figure 14c-d, par contre, les deux triangles ne montrent pas d’entrelacement et ils constituent la plupart de l’extérieur de l’hexagone. Ces deux stratégies différentes pour représenter visuellement la même constellation de relations Aristotéliennes sont étudiées plus en détail dans Demey & Smessaert (2014a).

4.2 L’octogone Béziau

L’octogone proposé par Béziau (2003) consiste en deux PCD de type C et deux PCD de type O. Par conséquent, il est représenté dans la Figure 15 comme un entrelacement d’un carré classique balancé (en gris clair) et un carré dégénéré (en gris foncé). Les sommets des deux carrés se trouvent sur le bord extérieur de l’octogone de manière strictement alternante. En comparaison de l’octogone Moretti-Pellissier, qui contient quatre triangles de contrariété aussi bien que quatre triangles de subcontrariété, la constellation Aristotélienne de l’OCTOGONE BEZIAU n’a que quatre formes triangulaires, à savoir deux triangles de subalternation et un triangle contraire entrelacé avec un triangle subcontraire.

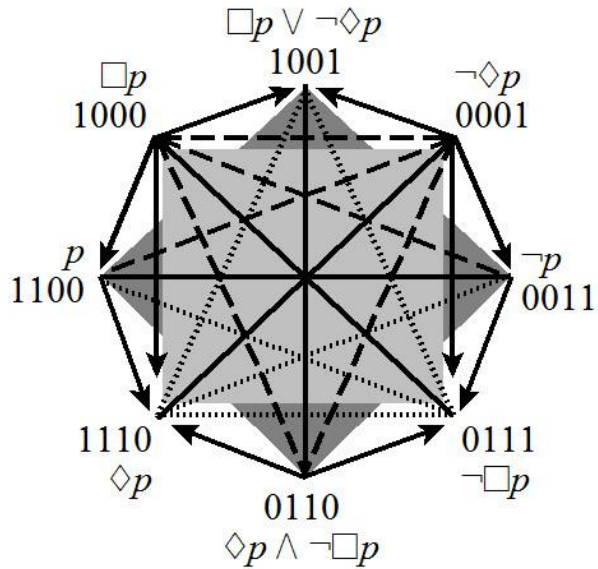


Figure 15. L'octogone Béziau

Comme dans le cas du paragraphe précédent, une configuration octogonale peut être décrite non seulement en termes de l'inscription des formes triangulaires ou carrées mais également en termes des quatre hexagones qui s'inscrivent. De ce point de vue, l'octogone Béziau est avant tout l'intégration de l'hexagone JSB fort de la Figure 16a et de l'hexagone SC de la Figure 16b, ce qui explique la présence de huit flèches de subalternation autour du bord extérieur de l'hexagone. A cause de la présence du carré dégénéré, les deux autres hexagones inscrits dans l'octogone Béziau sont les hexagones U4 dans les Figures 16c-d.

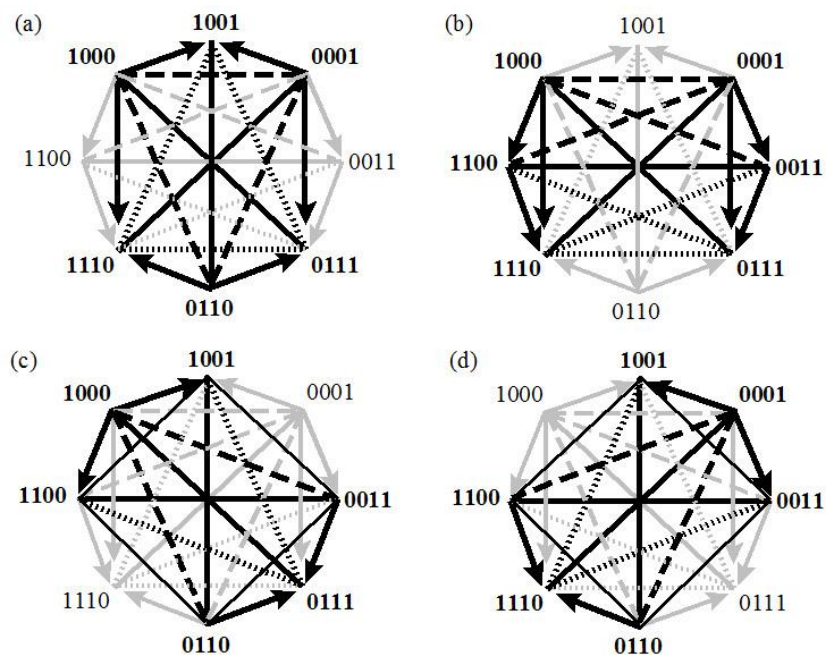


Figure 16. Les hexagones dans l'octogone Béziau:
 (a) JSB fort, (b) SC, (c) U4, (d) U4

4.3 L'octogone Buridan

Le troisième type d'octogone des oppositions est celui du Calcul Modal des Prédicats de Jean Buridan, qui a été étudié profondément par Hughes (1989) et Read (2012) et qui est représenté dans la Figure 17.⁵

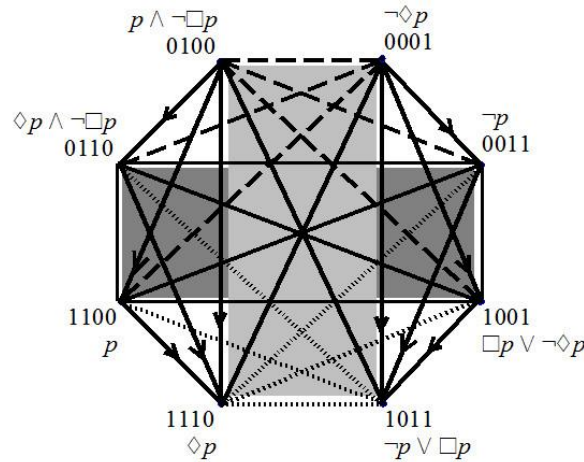


Figure 17. L'octogone Buridan

Comme dans le cas de l'octogone Béziau dans le paragraphe précédent, l'OCTOGONE BURIDAN consiste en deux PCD de type C et deux PCD de type O. Ainsi l'octogone Buridan peut lui aussi être représenté comme un entrelacement de deux carrés. Cependant, l'intégration du carré classique balancé (en gris clair) et du carré dégénéré (en gris foncé) s'est effectuée de manière différente dans la Figure 17, dans le sens où les sommets des deux carrés se trouvent autour du bord extérieur de l'octogone en alternance 'paire par paire'. En termes de formes triangulaires, l'octogone Buridan ressemble à l'octogone Béziau plutôt qu'à l'octogone Moretti-Pellissier en contenant quatre triangles au lieu de huit. En outre, ces quatre formes triangulaires inscrites dans l'octogone Buridan sont de la même famille, à savoir deux paires de triangles entrelacés, représentant la transitivité subalterne. Autrement dit, dans ce cas-ci, ni les relations de contrariété ni celles de subcontrariété ne correspondent à une forme triangulaire quelconque.

En ce qui concerne l'inscription des hexagones, l'octogone Buridan doit principalement être considéré comme l'intégration des deux hexagones SC dans les Figures 18a-b. Prenant l'hexagone SC dans la Figure 6c comme point de départ, la diagonale horizontale de la PCD de type O s'est 'dédoublée' en deux diagonales de PCD de type O. Par conséquent, toutes les flèches de subalternation pointent vers le bas dans l'octogone Buridan.

⁵Afin d'observer la consistance des diagrammes à travers l'article, la Figure 17 représente une structure isomorphe, avec les formules du système Modal Propositionnel S5 au lieu de celles du système original de Buridan. Le même type d'isomorphisme peut être établi avec le 'Cube de l'Import Existentiel' de Chatti & Schang (2013).

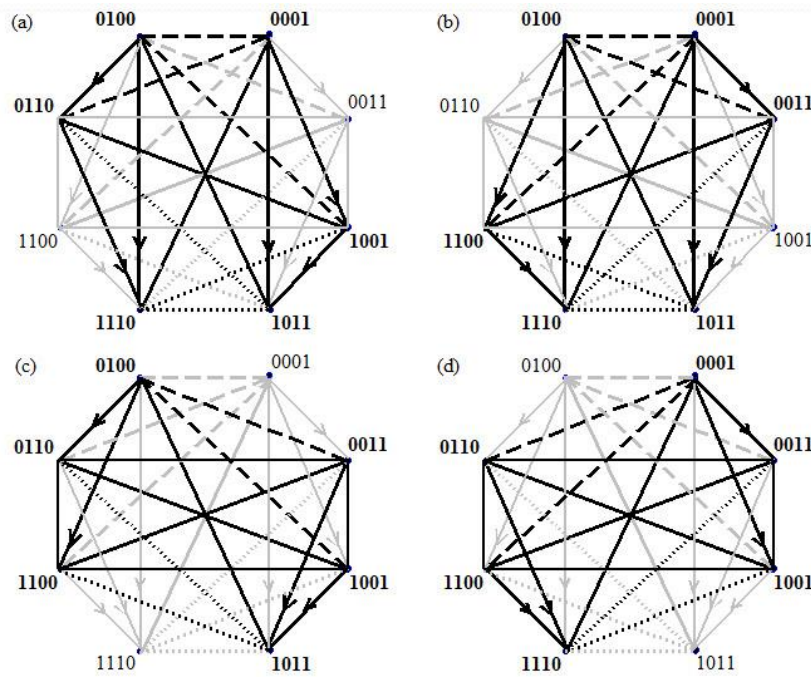


Figure 18. Les hexagones dans l’octogone Buridan: (a) SC, (b) SC, (c) U4, (d) U4

Les deux autres hexagones inscrits dans les Figures 18c-d sont des hexagones U4, construits à partir du carré dégénéré. Il faut remarquer, néanmoins, que ces deux hexagones ne se manifestent pas dans la constellation classique des Figures 10a ou 16c-d avec toutes les flèches de subalternation à l’extérieur de l’hexagone et les formes V de (sub)contrariété à l’intérieur. Plutôt, une configuration alternative émerge pour les relations Aristotéliennes dans l’hexagone U4, avec des angles plus aigus, aussi bien pour les flèches de subalternation que pour les formes V de (sub)contrariété. Une situation analogue, avec des représentations visuelles différentes pour la même constellation Aristotélienne, a été observée ci-dessus avec les différents hexagones JSB faibles dans les Figures 14a-b vis-à-vis les Figures 14c-d (voir Demey & Smessaert 2014a pour une étude plus détaillée).

4.4 Tableau sommaire des octogones

En conclusion, le Tableau 4 rassemble les distinctions que nous avons introduites entre les trois familles d’octogones Aristotéliens, aussi bien en termes de types de PCD qu’en termes du nombre et du type d’hexagones inscrits⁶.

les octogones Aristotéliens	PCD type C	PCD type O	hexagone JSB fort	hexagone JSB faible	hexagone SC	hexagone U4
<i>Moretti-Pellissier</i>	4	0	0	4	0	0
<i>Béziau</i>	2	2	1	0	1	2
<i>Buridan</i>	2	2	0	0	2	2

Tableau 4. Distinctions entre les trois familles d’octogones Aristotéliens

⁶Notons que le cinquième hexagone, c’est-à-dire l’hexagone U12 de la Figure 10b, ne se trouve pas dans le Tableau 4, parce qu’il ne s’inscrit dans aucun des trois octogones étudiés dans cette section. Cependant, la typologie des octogones dans cet article n’est pas exhaustive: on peut en effet construire un octogone dans lequel l’hexagone U12 s’inscrit.

Remarquons que la différence entre l'octogone Béziau et l'octogone Buridan ne dépend pas du nombre ou du type de PCD, mais de la façon dont les différents types de diagonales sont alternées: une alternation stricte mène à une combinaison d'un hexagone JSB fort et un hexagone SC dans l'octogone Béziau, tandis qu'une alternation 'paire par paire' mène à une constellation à deux hexagones SC dans l'octogone Buridan.

5. Représentation visuelle à trois dimensions

Quoique les diagrammes Aristotéliens soient devenus de plus en plus complexes dans les sections précédentes -- du carré à l'hexagone et puis à l'octogone -- leur visualisation s'est effectuée par des représentations à deux dimensions. Dans cette dernière partie, on passe du niveau des diagrammes à deux dimensions à celui des diagrammes à trois dimensions. Tout d'abord, nous retournerons à l'ensemble des quatorze formules contingentes (et les sept PCD qu'elles constituent) dans les deux systèmes logiques introduits dans les Tableaux 1 et 2 (§ 1.3), en assignant chaque CB à un sommet du dodécaèdre rhombique (§ 5.1). Ensuite, les différents sous-types de diagrammes à deux dimensions distingués ci-dessus s'avèreront inscrits dans le dodécaèdre rhombique chacun de sa propre façon: les carrés (§ 5.2), les hexagones (§ 5.3) et les octogones (§ 5.4). Un dernier paragraphe sera dédié à la complémentarité entre l'hexagone JSB fort et l'octogone Buridan en ce qui concerne leur inscription dans le dodécaèdre rhombique (§ 5.5).

5.1 Le dodécaèdre rhombique des oppositions

Le DODECAEDRE RHOMBIQUE (abrégé dorénavant comme DR) est un objet géométrique à trois dimensions qui consiste en douze ('dodeca-') faces ('-èdre') en forme de losange ('rhombique') et en quatorze sommets. Dans la Figure 19, ces quatorze sommets sont 'décorés' des quatorze CB représentant la dénotation des quatorze formules contingentes de la Logique Modale S5 ou les connecteurs du Calcul des Propositions⁷. La propriété essentielle de la visualisation dans cette Figure c'est que la relation Aristotélienne de la contradiction correspond à la relation géométrique de la symétrie centrale. En d'autres mots, le centre du DR sert de centre de symétrie⁸ et chaque PCD correspond à une diagonale du DR reliant une CB à son point image, la CB contradictoire.

⁷Dans Smessaert & Demey (2014c), le dodécaèdre rhombique est comparé plus en détail avec deux alternatives de représentation visuelle qui sont isomorphe, à savoir le tétrahexaèdre de Sauriol (1968) et le tetra-icosaèdre de Moretti (2009). Une représentation à trois dimension tout à fait différente, en forme d'un double tétraèdre, mais qui est encore fondamentalement isomorphe, a été proposée par Dubois & Prade (2012). En outre, les différences fondamentales entre le dodécaèdre rhombique de la Figure 19 et celui de Zellweger (1997) sont analysées dans Demey & Smessaert (2014b).

⁸Pour des raisons théoriques, les deux CB non-contingentes 0000 et 1111 sont souvent visualisées au centre du DR, c'est-à-dire coïncidant exactement à son centre de symétrie (pour plus de détails voir Demey & Smessaert 2014b).

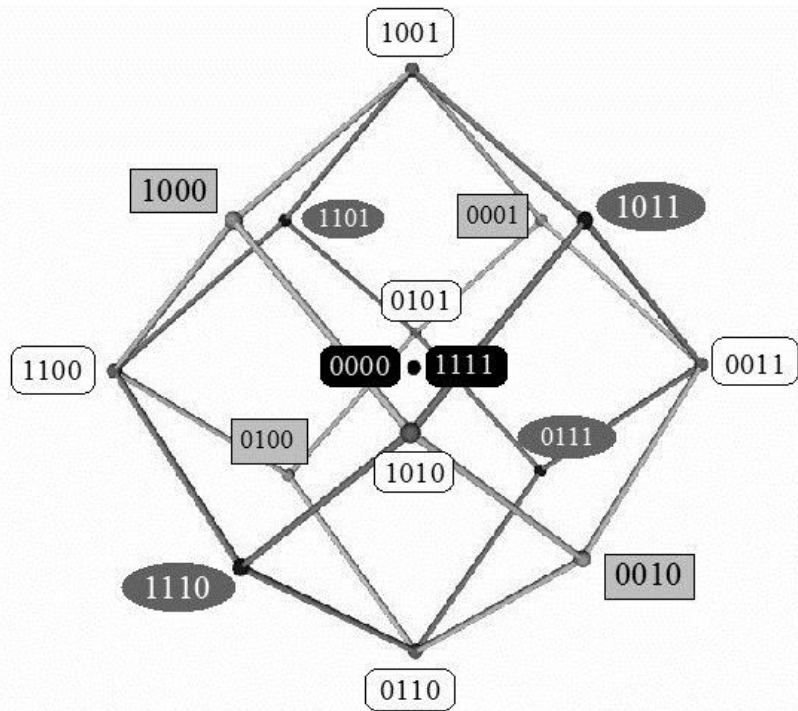


Figure 19. Le dodécaèdre rhombique DR décoré des CB à quatre positions

Vu que le DR est le polyèdre dual du cuboctaèdre (qui est lui-même un solide d'Archimède combinant les propriétés du cube et de l'octaèdre) il hérite cette double connection avec le cube et l'octaèdre⁹. La Figure 20 montre comment le cube et l'octaèdre s'inscrivent dans le DR.

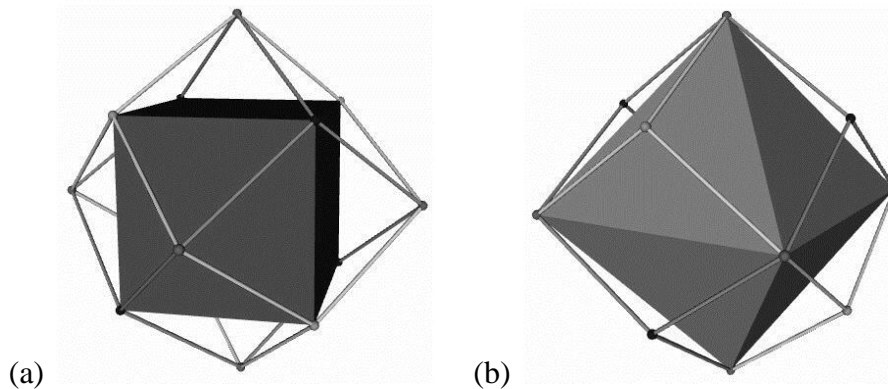


Figure 20. Inscription dans le DR d'un cube (a) et d'un octaèdre (b)

A ce point-ci, nous pouvons finalement expliciter l'origine du nom des deux types de PCD. Les quatre PCD de type C qui relient les quatre CB de niveau 1 (en gris clair) et les quatre CB de niveau 3 (en gris foncé) dans la Figure 19 sont exactement les quatre diagonales du cube qui s'inscrivent dans le DR de la Figure 20a. D'autre part, les trois PCD de type O reliant entre eux les six CB de niveau 2 dans la Figure 19 correspondent aux trois diagonales de l'octaèdre inscrit dans le DR de la Figure 20b.

5.2 Les carrés Aristotéliens dans le dodécaèdre rhombique

⁹Cette relation de dualité entre faces et sommets se manifeste en termes de la formule Euler: $S(\text{ommetts}) - A(\text{rêtes}) + F(\text{aces}) = 2$. Pour le cuboctaèdre, la formule est $12S - 24A + 14F = 2$, tandis que pour sa forme duale du DR c'est $14S - 24A + 12F = 2$. De la même manière, le cube ($8S - 12A + 6F = 2$) est le polyèdre dual de l'octaèdre ($6S - 12A + 8F = 2$).

Dans la Figure 21 nous illustrons comment les trois familles de carrés Aristotéliens s'inscrivent dans le DR.

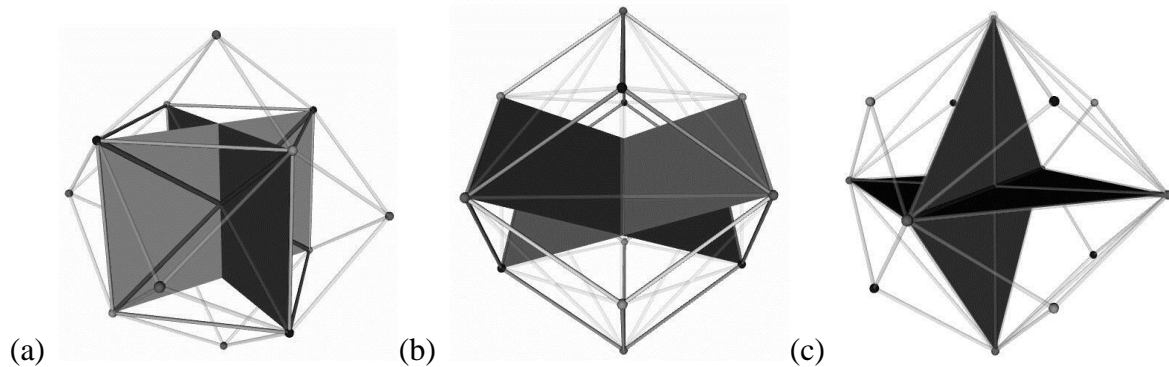
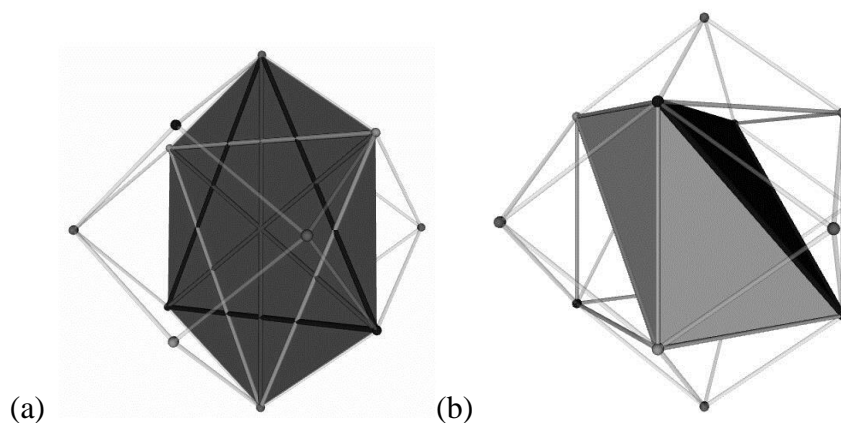


Figure 21. Inscription dans le DR de (a) deux carrés classiques balancés, (b) deux carrés classiques non-balancés, (c) deux carrés dégénérés balancés

Un carré classique balancé dans la Figure 21a contient deux PCD de type C et il coupe le cube à l'intérieur du DR en deux parties. Son bord extérieur alors consiste en deux arêtes du cube et deux diagonales d'une face du cube. De manière similaire, un carré dégénéré balancé dans la Figure 21c, contenant deux PCD de type O, coupe l'octaèdre à l'intérieur du DR en deux parties et son bord extérieur consiste en quatre arêtes de l'octaèdre. Un carré non-balancé dans la Figure 21b, par contre, contient des PCD de différents types et il est 'tendu' entre deux arêtes opposées du DR.

5.3 Les hexagones Aristotéliens dans le dodécaèdre rhombique

L'octaèdre à l'intérieur du DR dans la Figure 20b est la représentation à trois dimensions de l'hexagone U12: les six sommets de l'octaèdre sont décorés de six CB de niveau 2 qui constituent les trois PCD de type O. La Figure 22 montre l'inscription des quatre autres familles d'hexagones Aristotéliens dans le DR.



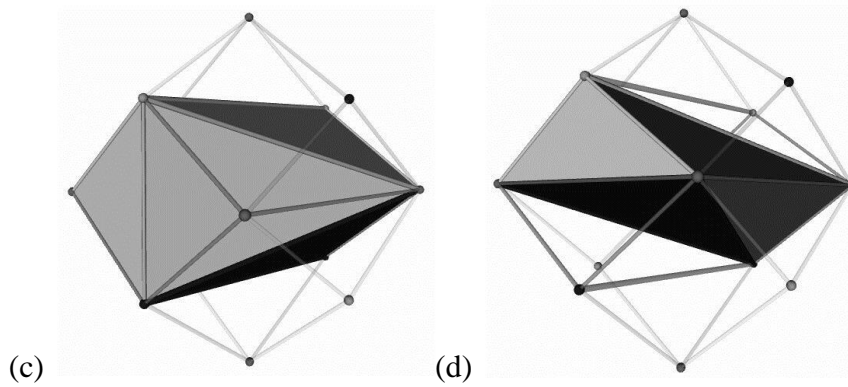


Figure 22. Inscription dans le DR de (a) l'hexagone JSB fort, (b) l'hexagone JSB faible, (c) l'hexagone SC, (d) l'hexagone U4

Avec l'inscription de l'hexagone JSB fort dans la Figure 22a, les trois diagonales -- deux PCD de type C et une PCD de type O -- se trouvent dans le même plan. En d'autres mots, l'hexagone JSB fort reste un objet à deux dimensions, à savoir un plan hexagonal, qui coupe le DR en deux parties identiques. Comme l'ont démontré Demey (2012), Moretti (2009), Sauriol (1968) et Smessaert (2009, 2012), on peut construire six différents hexagones JSB forts à base des quatorze formules contingentes des Tableaux 1 et 2. En termes de visualisation à trois dimensions, cela implique qu'il y a, en effet, exactement six plans contenant six des quatorze sommets du DR qui coupent le polyèdre en deux parties. Les inscriptions de l'hexagone JSB faible (Figure 22b) et l'hexagone SC (Figure 22c) dans le DR se ressemblent fortement dans le sens où ils se manifestent comme un octaèdre tordu avec six sommets et huit faces triangulaires. Le plan central de l'octaèdre est le même dans les deux cas, c'est-à-dire un carré classique balancé avec deux PCD de type C. La seule différence fondamentale est que la troisième PCD diagonale de l'hexagone JSB faible (Figure 22b) est du même type C que celles du carré central, tandis que dans l'hexagone SC (Figure 22c) la troisième diagonale est une PCD de type O. Avec l'hexagone U4 inscrit dans le DR (Figure 22d), en revanche, le plan central de l'octaèdre tordu est un carré dégénéré avec deux PCD de type O et la troisième PCD diagonale est de type C.

5.4 Les octogones Aristotéliens dans le dodécaèdre rhombique

En ce qui concerne la visualisation à trois dimensions des trois familles d'octogones Aristotéliens introduites dans la quatrième partie de cet article, notons tout d'abord que le cube à l'intérieur du DR dans la Figure 20a correspond à l'octogone Moretti-Pellissier: les huit sommets du cube sont décorés des quatre CB de niveau 1 et des quatre CB de niveau 3 constituant les quatre PCD de type C. L'inscription des deux autres familles d'octogones Aristotéliens dans le DR est illustrée dans la Figure 23.

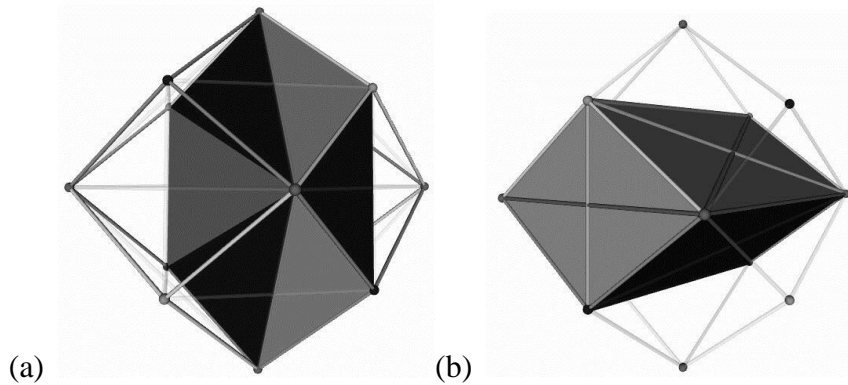


Figure 23. Inscription dans le DR de (a) l'octogone Béziau, (b) l'octogone Buridan

Quoiqu'ils consistent tous les deux en deux PCD de type C (du carré classique balancé) et deux PCD de type O (du carré dégénéré), l'octogone Béziau (Figure 15) a une constellation Aristotélicienne tout à fait différente de celle de l'octogone Buridan (Figure 17), à cause de la manière différente dont s'entrelacent les carrés. En conséquence, il n'est pas du tout surprenant que leur représentation à trois dimensions à l'intérieur du DR soit toute différente aussi. L'octogone Béziau se manifeste dans la Figure 23a comme un BIPYRAMIDE HEXAGONAL tordu, c'est-à-dire un polyèdre constitué de deux pyramides symétriques dont la même base est formée par le plan hexagonal de l'hexagone JSB fort. L'inscription dans le DR de l'octogone Buridan représentée dans la Figure 23b, par contre, constitue un objet à trois dimensions qui n'a pas de dénomination standard dans la littérature sur les polyèdres. Nous allons le désigner sous le terme de RHOMBICUBE¹⁰, l'idée étant qu'un cube, placé sur l'une de ses arêtes, est pressé vers le bas afin de changer sa face antérieure et sa face postérieure de carré en forme rhombique. A l'intérieur du rhombicube, le carré classique balancé (Figure 21a) et le carré dégénéré (Figure 21c) sont perpendiculaires l'un à l'autre, ce qui donne un aspect de symétrie au rhombicube qui est absent du bipyramide de Béziau. Dans le domaine à deux dimensions, il a été montré que l'octogone Buridan contient deux hexagones SC et deux hexagones U4 (Figure 18). Autrement dit, chacun de ces quatre hexagones peut être considéré comme un octogone Buridan avec une diagonale éliminée. De manière analogique, les octaèdres tordus dans les Figures 22c et 22d ne sont que des rhombicubes avec les deux sommets d'une PCD 'découpés'. Par conséquent, un rhombicube contient à la fois deux octaèdres SC, selon laquelle des diagonales de type O ont été éliminées, et deux octaèdres U4, selon laquelle des diagonales de type C ont été éliminées.

5.5 La complémentarité entre l'hexagone SB fort et le rhombicube

Un résultat important de notre analyse est l'observation que, lorsqu'on prend un ensemble contenant six des quatorze formules/CB des Tableaux 1 et 2 entre lesquelles les relations Aristotéliciennes constituent un hexagone JSB fort, la constellation Aristotélicienne dans l'ensemble complémentaire contenant les huit formules/CB restantes est un octogone Buridan. A cette complémentarité logique correspond une complémentarité géométrique élégante dans la représentation à trois dimensions entre le plan de l'hexagone JSB fort et le rhombicube, comme illustrée au centre de la Figure 24.

¹⁰Le terme apparaît de temps en temps, ou bien comme abréviation de 'rhombicuboctaèdre' (un solide d'Archimède tout à fait différent) ou bien comme dénomination alternative mais moins heureuse pour le dodécaèdre rhombique. Aucune de ces deux interprétations ne correspond à notre notion.

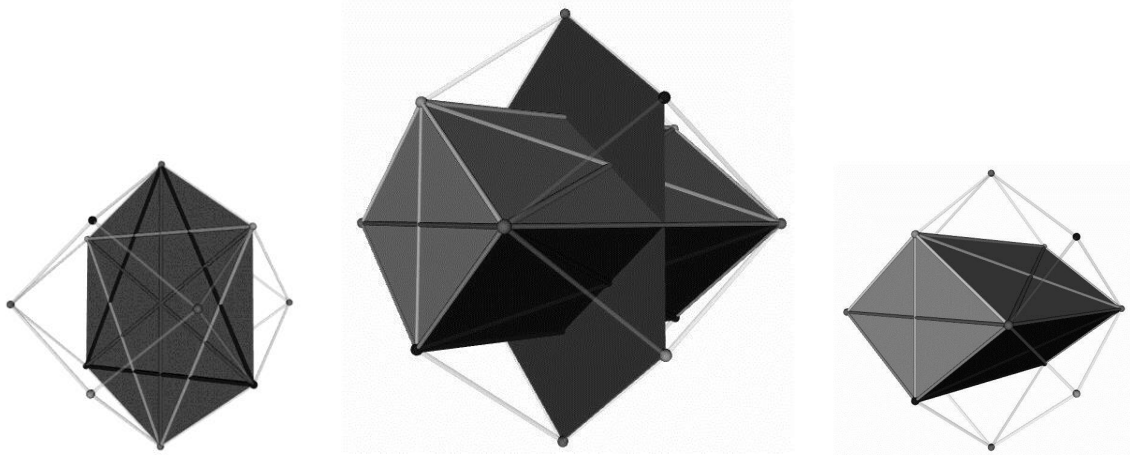


Figure 24. La complémentarité dans le DR (centre) entre l'hexagone SB fort (à gauche) et le rhombicube (à droite)

Vu qu'un rhombicube contient à la fois deux octaèdres SC et deux octaèdres U4, deux formulations alternatives pour la complémentarité entre l'hexagone JSB fort et le rhombicube/octogone Buridan dans la Figure 24 se présentent: d'une part l'hexagone JSB fort est le complémentaire d'une paire d'octaèdres ou hexagones SC, et d'autre part il est le complémentaire d'une paire d'octaèdres ou hexagones U4. De cette manière, le rhombicube établit une forte interconnectivité entre les trois sous-types d'hexagones Aristotéliens les plus courants, à savoir l'hexagone JSB fort, l'hexagone SC et l'hexagone U4. Comme démontré ci-dessus, six hexagones JSB forts s'inscrivent dans le DR. Par conséquent, six rhombicubes complémentaires s'inscrivent dans le DR aussi. En outre, l'entrelacement de deux paires d'octaèdres dans chaque rhombicube implique l'inscription dans le DR de douze octaèdres SC et de douze octaèdres U4.

6. Conclusions et perspectives futures

L'objectif principal de cet article a été de fournir une analyse plus unifiée d'un nombre de diagrammes Aristotéliens qui sont en général traités indépendamment l'un de l'autre dans la littérature. La partie centrale a été consacrée à une stratégie générale pour tracer la structure interne du dodécaèdre rhombique de manière systématique. Ce DR représente les relations Aristotéliennes dans un ensemble contenant quatorze formules contingentes qui est clos sous les opérateurs booléens. Sur la base des types de PCD, nous avons distingué trois familles de carrés, cinq familles d'hexagones et trois familles d'octogones. En outre, chaque hexagone est caractérisé en termes de l'inscription de trois carrés, et chaque octogone en termes de l'inscription de quatre hexagones. Dans une dernière partie, dédiée à la visualisation à trois dimensions, une complémentarité logique entre les six formules d'un hexagone JSB fort et les huit formules d'un octogone Buridan a été établie. A cette complémentarité logique correspond une complémentarité géométrique entre le plan de l'hexagone JSB fort, coupant le DR en deux parties, et le rhombicube.

La prochaine étape de ce projet de recherche sera d'établir une typologie exhaustive des sous-diagrammes du DR au moyen de l'analyse combinatoire. Quoique, dans le domaine des CB à quatre positions, les trois familles de carrés et les cinq familles d'hexagones couvrent toutes les possibilités logiques, la typologie des octogones dans cet article n'a pas été exhaustive. Questions centrales seront donc (i) combien de familles d'octogones, de décagones et de dodécagones faut-il distinguer à l'intérieur du DR ? et (ii) de combien de membres est composée chaque famille? Par exemple, nous avons démontré l'inscription dans le DR de six

hexagones JSB forts, de six octogones Buridan, de douze hexagones SC et de douze hexagones U4, mais quels sont les nombres des autres familles d'hexagones/octogones ou des trois familles de carrés? En bref, combien de sous-diagrammes et de quel type s'inscrivent-ils dans le dodécaèdre rhombique?

Références

- Béziau, J.Y.: New light on the square of oppositions and its nameless corner. *Logical Investigations* **10**, 218-232 (2003).
- Blanché, R.: *Structures Intellectuelles. Essai sur l'organisation systématique des concepts*. Librairie Philosophique J. Vrin, Paris (1969).
- Chatti, S. & Schang, F.: The Cube, the Square and the Problem of Existential Import, *History and Philosophy of Logic*, **34**, 101-132 (2013).
- Czezowski, T.: On certain peculiarities of singular propositions. *Mind* **64**, 392-395 (1955).
- Demey, L.: Structures of Oppositions in Public Announcement Logic. In: Béziau, J.Y., Jacquette, D. (eds.) *Around and Beyond the Square of Opposition*, pp. 313-339. Springer, Basel (2012).
- Demey, L. & Smessaert, H.: Algebraic and Cognitive Aspects of Presenting Aristotelian Diagrams. Conférence au Fourth World Congress on the Square of Opposition, Pontifical Lateran University, Vatican, May 5-9, 2014 (2014a).
- Demey, L. & Smessaert, H.: The Relationship between Aristotelian and Hasse Diagrams. A apparaît dans Helen Purchase & Aidan Delaney (eds.) *Diagrammatic Representation and Inference*. Lecture Notes in Computer Science (LNCS), Springer, Berlin (2014b).
- Dubois, D. & Prade, H.: From Blanché's Hexagonal Organization of Concepts to Formal Concept Analysis and Possibility Theory. *Logica Universalis* **6**, 149-169 (2012).
- Hughes, G.: The modal logic of John Buridan. Dans: *Atti del Congresso Internazionale di Storia della Logica: La teoria delle modalità*, pp. 93-111. CLUEB, Bologna (1989).
- Jacoby, P.: A Triangle of Opposites for Types of Propositions in Aristotelian Logic. *The New Scholasticism* **24**, 32-56 (1950).
- Khomskii, Y.: William of Sherwood, singular propositions and the hexagon of opposition. Dans: Béziau, J.Y. & Payette, G. (eds.) *New Perspectives on the Square of Opposition*. Peter Lang, Bern (2011).
- Kretzmann, N.: *William of Sherwood's Introduction to Logic*. Minnesota Archive Editions, Minneapolis (1966).
- Moretti, A.: *The Geometry of Logical Opposition*. Ph.D. thesis, University of Neuchâtel (2009).
- Moretti, A.: Why the Logical Hexagon? *Logica Universalis* **6**, 69-107 (2012).
- Pellissier, R.: Setting n-opposition. *Logica Universalis* **2**, 235-263 (2008).
- Read, S.: John Buridan's Theory of Consequence and his Octagons of Opposition. Dans: Béziau, J.Y. & Jacquette, D. (eds.) *Around and Beyond the Square of Opposition*, pp. 93-110. Springer, Basel (2012).
- Sauriol, P.: Remarques sur la théorie de l'hexagone logique de Blanché. *Dialogue* **7**, 374-390 (1968).
- Sesmat, A.: *Logique II. Les Raisonnements*. Hermann, Paris (1951).
- Smessaert, H.: On the 3D visualisation of logical relations. *Logica Universalis* **3**, 303-332 (2009).
- Smessaert, H.: The Classical Aristotelian hexagon versus the Modern Duality hexagon. *Logica Universalis* **6**, 171-199 (2012).
- Smessaert, H.: Boolean differences between two hexagonal extensions of the logical Square of Oppositions. Dans: Philip Cox, Beryl Plimmer & Peter Rodgers (eds.) *Diagrammatic Representation and Inference*. Lecture Notes in Artificial Intelligence 7352, pp. 193-199. Springer, Berlin (2012).

- Smessaert, H. & Demey, L.: The Unreasonable Effectiveness of Bitstrings in Logical Geometry. Conférence au *Fourth World Congress on the Square of Opposition*, Pontifical Lateran University, Vatican, May 5-9, 2014 (2014a).
- Smessaert, H. & Demey, L.: Logical Geometries and Information in the Square of Oppositions. Manuscrit soumis (2014b).
- Smessaert, H. & Demey, L.: Logical and Geometrical Complementarities between Aristotelian Diagrams. A paraître dans Helen Purchase & Aidan Delaney (eds.) *Diagrammatic Representation and Inference*. Lecture Notes in Computer Science (LNCS), Springer, Berlin (2014c).
- Zellweger, S.: Untapped potential in Peirce's iconic notation for the sixteen binary connectives. Dans: Hauser N., Roberts D.D. & Evra J.V. (eds.) *Studies in the Logic of Charles Peirce*, pp. 334-386. Indiana University Press, Bloomington (1997).